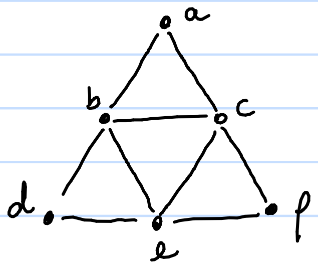
Aula 03 - Números Extremais, Teorema de Mantel e Teorema de Turan

Dado um grafo G, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é uma <u>clique</u> se, para todo $u, v \in S$, temos que $uv \in E(G)$ e dizemos que S é um <u>conjunto independente</u> se, para todo $u, v \in S$, temos que $uv \notin S$.

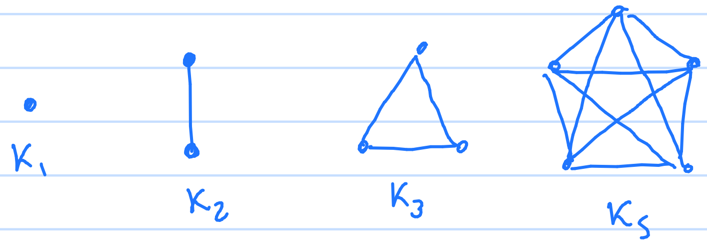
Ex.



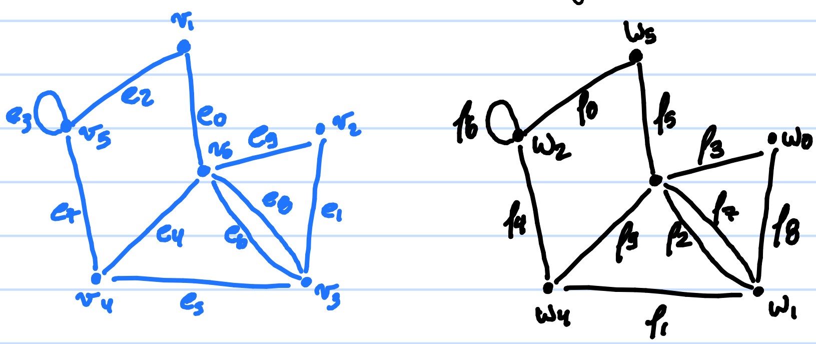
* $T = \{a, d, f\}$ é um conj. independente
* $W = \{b, c, e\}$ é uma clique

- Dizemos que um grafo G é <u>completo</u> se G possui todas as arestas possíveis, i.e., $V(G)$ é uma clique.

- Escrevemos K_n para denotar o grafo completo de n vértices.

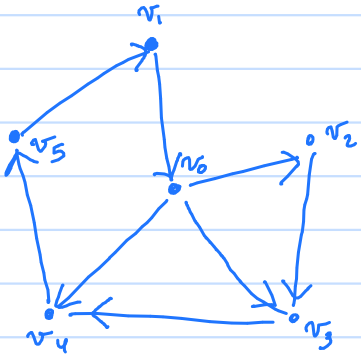


→ O K_3 também é chamado de <u>triângulo</u>.

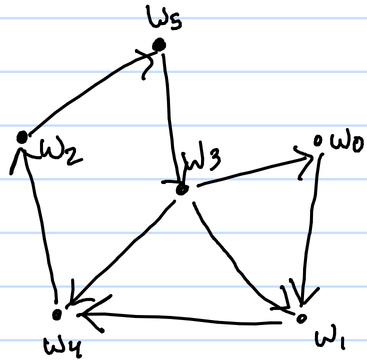


Se os grafos G e H apresentam estruturas idênticas quando ignorados os rótulos dos vértices e arestas, então dizemos que G e H são <u>isomorfos</u> (iso = igual, morfo = forma).

Dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (A, B)$ são <u>isomorfos</u> se existe uma bijeção $\pi : V \to A$ tal que $uv \in E$ sse $\pi(u)\pi(v) \in B$.



G

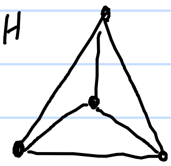


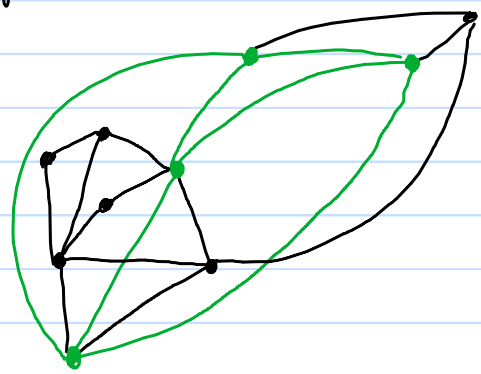
H

$$\pi = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ w_3 & w_5 & w_0 & w_1 & w_4 & w_2 \end{pmatrix}$$

Dizemos que um grafo G <u>contém (uma cópia)</u> de H se existe um subgrafo $H' \subseteq G$ que é isomorfo a H.

H





$H \subseteq G$

- A distinção entre esses dois conceitos ñ será importante p/ nós e por isso tbm escreveremos $H \subseteq G$ para indicar que G possui uma cópia de H.

- Dizemos que G é <u>H-livre</u>, <u>livre de H</u> ou <u>sem H</u> se G ñ contém uma cópia de H.

- Para $n \in \mathbb{N}$ e um grafo H, o <u>número extremal de H</u> é

$$ex(n, H) = \max\{e(G) : v(G) = n \text{ e } G \text{ é } H\text{-livre}\}$$

- Um grafo G com n vértices H-livre tal que $e(G) = ex(n, H)$ é dito ser <u>H-extremal</u>.

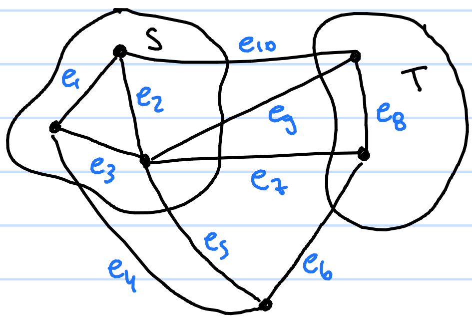
Cortes

Sejam G um grafo e $S,T \subseteq V(G)$ tais que $S \cap T = \emptyset$, $S \neq \emptyset$ e $T \neq \emptyset$.
Definimos

$$E(S,T) = \{uv \in E(G) : u \in S \text{ e } v \in T\}$$
$$e(S,T) = |E(S,T)|$$

Dizemos que $E(S,T)$ é o (S,T)-corte de G.

Ex:



$E(S,T) = \{e_{10}, e_9, e_7\}$

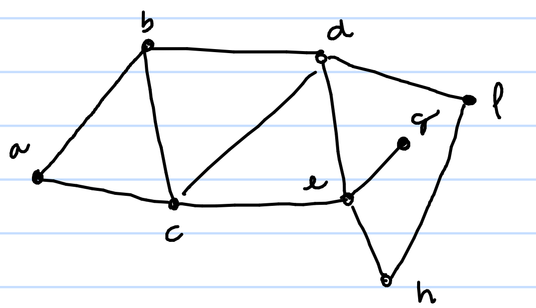
Subgrafo induzido

Dados um grafo G e $S \subseteq V(G)$, o subgrafo de G induzido por S, denotado $G[S]$, é o grafo definido por

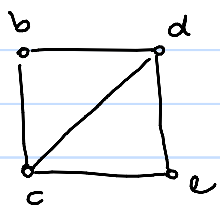
$$V(G[S]) = V(G) \setminus S$$
$$E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u,v \in S\}$$

Ex.

$$S = \{b, d, c, e\}$$

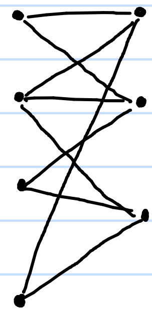


G



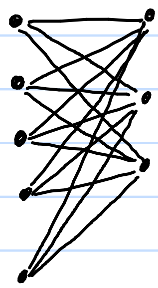
$G[S]$

Um grafo G é **bipartido** se existe uma partição $\{X, Y\}$ do conjunto $V(G)$ tal que X e Y são conjuntos independentes. Neste caso tbm dizemos que G é **(X,Y)-bipartido** e escrevemos **$G[X,Y]$**.



Exemplo de um grafo bipatido

Dizemos que um grafo G é **bipartido completo** se G é (X,Y)-bipartido e $E(X,Y)$ possui todas as arestas possíveis. Ademais, se $|X| = \ell$ e $|Y| = k$, denotamos esse grafo por **$K_{\ell,k}$**.



$K_{5,3}$

Lema. $e(K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}) = \lfloor n^2/4 \rfloor$

Demonstração

Seja (A,B) uma bipartição do $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ tal que $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $|B| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como todo vértice $u \in A$ tem uma aresta para cada um dos vértices de B, temos que $e(K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
O restante da prova é dividido em dois casos, a depender da paridade de n.

Primeiro suponha que n é par. Então

$$e\left(K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4},$$ e o resultado segue.

Agora suponha que n é um número ímpar, então $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Assim

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = k(k+1) = k^2 + k \qquad (A)$$

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k^2 + 4k + 1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor k^2 + k + 1/4 \right\rfloor = k^2 + k \qquad (B)$$

E o resultado segue por (A) e (B). $\square$

Teorema (Mantel, 1907)
Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja G um grafo K_3-livre com n vértices. Então

$$e(G) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Além disso, $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se $G = K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

Demonstração
Note que a volta da segunda parte do teorema é válida pelo lema anterior, portando precisamos nos preocupar apenas com a ida nessa parte.
A prova segue por indução em n

Base $n=1$ e $n=2$

Se $n=1$, então $e(G) = 0 = \left\lfloor \frac{1^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ademais, $G = K_{0,1} = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$

se $n=2$, então $e(G) = 1 = \left\lfloor \frac{2^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Ademais se $n=2$ e $e(G)=1$, então $G = K_2 = K_{1,1} = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

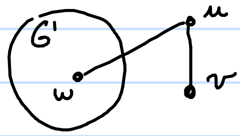
Passo $n \geq 3$

- Se $e(G)=0$, então o resultado segue trivialmente
- Então, suponha que $e(G) > 0$ e seja $uv \in E(G)$.
- Seja $G' = G - u - v$ e note que G' é livre de triangulo
- Por hipótese de indução

  ⓐ $e(G') \leq \frac{(n-2)^2}{4}$; e

  ⓑ Se $e(G') = \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor \Leftrightarrow G' = K_{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-2}{4} \rceil}$

- Note que todo vértice $w \in V(G')$ é vizinho de no máximo um vértice em $\{u, v\}$, já que G é livre de triângulo.



- Assim,

$$e(G) \leq e(G') + n - 1 \leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2 - \cancel{4n} + \cancel{4} + \cancel{4n} - \cancel{4}}{4} \quad (A)$$

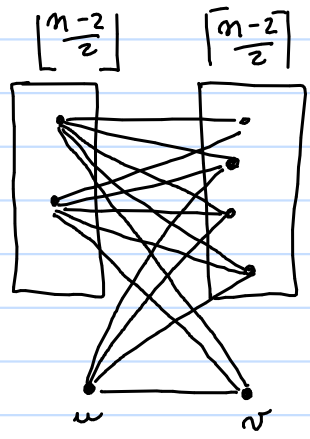
$$= \frac{n^2}{4}$$

- Isso conclui a demonstração da primeira parte do teorema.
- Quando n é par $e(G) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \frac{n^2}{4}$

- isso significa que as duas desigualdades de (A) devem valer na igualdade, ou seja,

- $e(G') = \frac{(n-2)^2}{4} = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor \underset{\text{por H.I.}}{\Rightarrow} G' = K_{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-2}{2} \rceil}$

- $e(V(G'), \{u,v\}) = n-2$, i.e., cada vértice de G' é adjacente a precisamente um vértice em $\{u,v\}$.



- Sejam $U = \{u\} \cup \{x \in V(G') : xv \in E(G)\}$ e
  $V = \{v\} \cup \{x \in V(G') : xu \in E(G)\}$

- Note que $V(G) = U \cup V$, u é adjacente a todos os vértices V e a nenhum vértice em U, v é adjacente a todos os vértices de U e a nenhum dos vértices de V.

- Se U não for um conj. independente, então existem dois vértices $x, y \in U$ tais que $xy \in E(G)$. Note que x e y devem ser vértices de G'. Então os vértices x, y, v estão em um triângulo, o que contraria o fato de G ser K_3-livre. Com isso, concluímos que U e, por simetria, são conj. independentes.

- Sabemos que $G' = K_{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-2}{2} \rceil}$ por H.I.. Seja $\{X', Y'\}$ uma bipartição de G'. Note que ñ é possível que $U \cap X' \neq \emptyset$ <u>e</u> $U \cap Y' \neq \emptyset$, já que existe uma aresta entre qualque par de vértices onde $x \in X'$ e $y \in Y'$ e U é independente. O mesmo se aplica ao conj. V.

- Portanto ou $X' \subseteq U$ e $Y' \subseteq V$ ou $X' \subseteq V$ e $Y' \subseteq U$.
- Assim, $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

O caso em que n é ímpar é análogo e fica de exercício $\square$

- Note que o Teorema de Mantel determina o número extremal do K_3 e os grafos K_3-extremais.

- Corolário. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.